Optimisation de boîtes noires multi-fidélité en énergie

Xavier Lebeuf

Concepts mathématiques développés, présentés formellement

juin 2022

1 Définitions

1.1 Définitions courtes

Définition de la valeur d'une contrainte d'un problème d'optimisation à une certaine fidélité.

$$c_j(x, \phi) := \text{ la valeur de la contrainte } j \text{ évaluée à une fidélité } \phi \text{ au point } x. \tag{1}$$

Définition d'une fonction binaire témoigant de la satisfaction d'une contrainte.

$$\beta(c_j(x, \phi)) := \begin{cases} 1 \text{ si } c_j(x, \phi) \leq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \tag{2}$$

Définition d'un ensemble de fidélités. La discrétisation de la fidélité en n valeurs est effectuée avant l'optimisation. Ces valeurs forment F.

$$\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_\ell\} \in]0, 1]^\ell := \text{ ensemble des } \ell \text{ fidélités choisies} \tag{3}$$

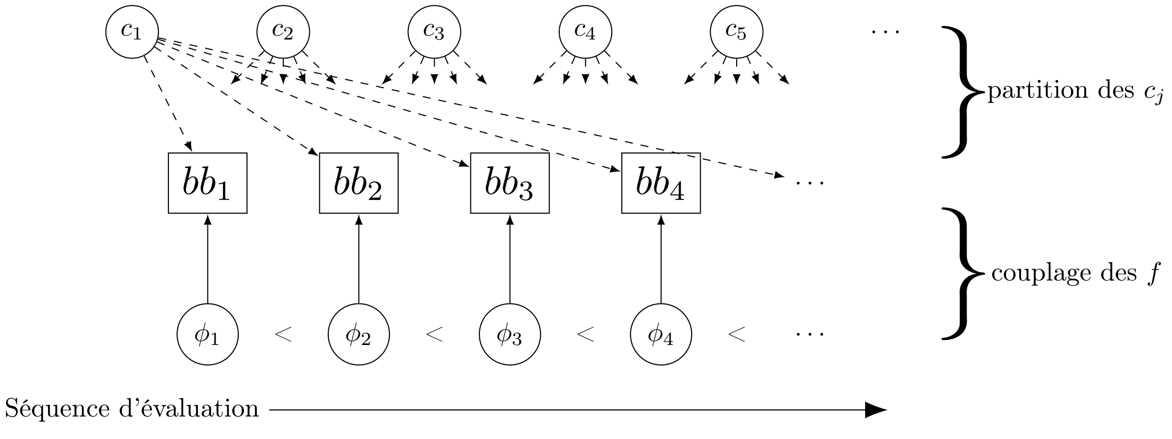
1.2 Fidélité représentative

Soit une contrainte c_j, un point x et une fidélité $\phi_1 \in \Phi$. La fidélité ϕ_1 est dite représentative pour $c_j(x) \iff \beta(c_j(x, \phi_1)) = \beta(c_j(x, 1))$ et $\nexists\, \phi_2 > \phi_1 : \beta(c_j, \phi_2) \neq \beta(c_j, 1)$, où $\phi_2 \in \Phi$.

Donc, la fidélité représentative minimale d'une contrainte est la plus petite fidélité qui identifie correctement si la contrainte est satisfaite ou non.

2 Problème

On a ℓ sous black boxes (et ℓ fidélités différentes).
bb_1 est évaluée en premier. Si les contraintes de bb_1 sont satisfaites, on évalue bb_2, et ainsi de suite.



3 Modèle de partition optimale des contraintes en sous black boxes hiérarchisées

Données

$$\begin{aligned}
\Phi :=&\ \text{ensemble des différentes fidélités} && (4)\\
=&\ \{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_\ell\} && (5)\\
\ell = |\Phi| :=&\ \text{nombre de fidélités, nombre de sous black boxes} && (6)\\
bb_i :=&\ \text{sous black box } i\text{, de fidélité } \phi_i \in \Phi && (7)\\
i \in I =&\ \{1, 2, 3 \ldots, \ell\} && (8)\\
m :=&\ \text{nombre de contraintes (de la black box originale) à partitionner} && (9)\\
j \in J =&\ \{1, 2, 3 \ldots, m\} && (10)\\
\tau :=&\ \text{tolérance sur les } r_{ij},\ \tau \in [0, 1] && (11)\\
& && (12)
\end{aligned}$$

Données d'une anayle à priori ou apprisent durant l'optimisation

$$\begin{aligned}
r_{ij} :=&\ \text{estimation de la probabilité que la fidélité } \phi_i \in \Phi \text{ (de } bb_i\text{)} && (13)\\
&\ \text{soit représentative pour la contrainte } c_j && (14)\\
p_{ij} :=&\ \text{, estimation de la probabilité que } c_j \text{ soit satisfaite à } \phi_i \in \Phi && (15)\\
&\ \approx Pr[\beta(c_j, \phi_i) = 1] && (16)\\
t_i :=&\ \text{estimation du temps d'une évaluation de } bb_i && (17)
\end{aligned}$$

Variables intermédiaires

$$\begin{aligned}
P_i :=&\ \text{probabilité qu'une contrainte de } bb_i \text{ ne soit pas satisfaite} && (18)\\
T_i :=&\ \text{temps d'évaluation en pratique de } bb_i && (19)
\end{aligned}$$

Variables de décision

$$\chi_{ij} := \begin{cases} 1 \text{ si } c_j \text{ est partitionnée dans } bb_i \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \tag{20}$$

$$y_i := \begin{cases} 0 \text{ si } bb_i \text{ ne contient aucune contrainte} \\ 1 \text{ sinon} \end{cases} \tag{21}$$

Modèle

$$\min_{\substack{\chi \in \mathbb{B}^{\ell \times m}, y \in \mathbb{B}^\ell, \\ P \in [0,1]^\ell \subset \mathbb{R}^\ell, T \in \mathbb{R}^\ell}} \quad \mathbb{E}\,[\text{ temps d'une évaluation }] \tag{22}$$

$$= \min_{\substack{\chi \in \mathbb{B}^{\ell \times m}, y \in \mathbb{B}^\ell, \\ P \in [0,1]^\ell \subset \mathbb{R}^\ell, T \in \mathbb{R}^\ell}} \quad \sum_{i \in I} \left(P_i \cdot \prod_{k=1}^{i-1} (1 - P_k) \cdot \sum_{k=1}^{i} T_k \right) + \left(\prod_{i \in I} (1 - P_i) \right) \cdot \sum_{i \in I} T_i \tag{23}$$

s.c.

$$\sum_{i \in I} \chi_{ij} = 1 \quad \forall\, j \in J \tag{24}$$

$$y_i \geq \frac{1}{m} \sum_{j \in J} \chi_{ij} \quad \forall\, i \in I \tag{25}$$

$$r_{ij} \geq (1 - \tau) \cdot \chi_{ij} \quad \forall\, i \in I, \forall\, j \in J \tag{26}$$

$$T_i = t_i \cdot y_i \quad \forall\, i \in I \tag{27}$$

$$P_i = \left(1 - \prod_{j \in J} \left(p_{ij} \cdot \chi_{ij} + 1 - \chi_{ij} \right) \right) \quad \forall\, i \in I \tag{28}$$

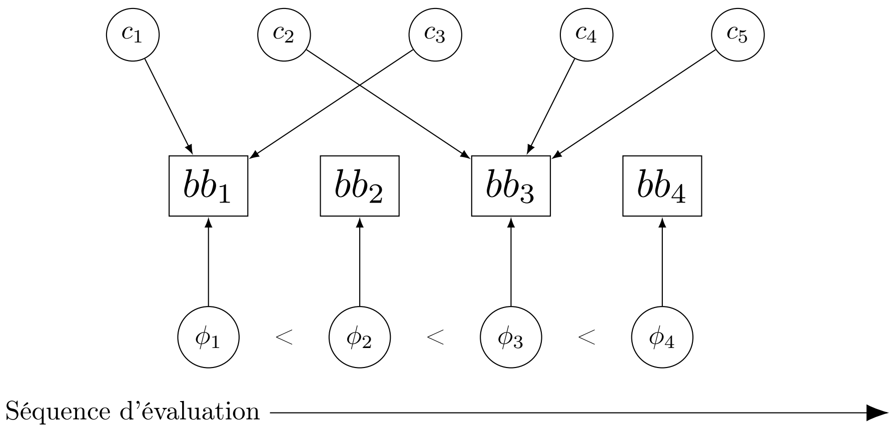
3.1 Explications

$$
\begin{aligned}
&(23) : \text{L'espérence du temps de l'évaluation de tout point est minimisée.} && (29)\\
&(24) : \text{Chaque contrainte est partitionnée dans une sous black box.} && (30)\\
&(25) : \text{Au moins une contrainte est partitionnée dans } bb_i \implies y_i = 1. && (31)\\
&\qquad\ \ \text{Sinon, la minimisation de l'objectif } \implies y_i = 0. && (32)\\
&(26) : \text{Chaque contrainte a une probabilité d'être mal représentée inférieure à } \tau. && (33)\\
&(27) : T_i \text{ est nul si aucune contrainte n'est partitionnée à } bb_i. && (34)\\
&(28) : P_i \text{ est donné par les } p_{ij} \text{ partitionnées à } bb_i. && (35)
\end{aligned}
$$

Exemple de la forme de l'objectif

$$
\begin{aligned}
\text{4 fidélités} &\implies \ell = 4 && (36)\\
\text{5 contraintes} &\implies m = 5 && (37)\\
\text{objectif} &= min \quad \mathbb{E}[\text{temps d'une évaluation}] && (38)\\
&= min \quad \sum_i \big(\text{temps d'évaluation}_i \cdot Pr[\text{temps d'une évaluation}_i]\big) && (39)\\
&= P_1T_1 && (40)\\
&+ P_2(1-P_1)(T_1+T_2) && (41)\\
&+ P_3(1-P_1)(1-P_2)(T_1+T_2+T_3) && (42)\\
&+ P_4(1-P_1)(1-P_2)(1-P_3)(T_1+T_2+T_3+T_4) && (43)\\
&+ \underbrace{(1-P_1)(1-P_2)(1-P_3)(1-P_4)}_{\text{Probabilité qu'un point soit réalisable}}(T_1+T_2+T_3+T_4) && (44)
\end{aligned}
$$

Si la solution du modèle est comme suis,



l'objectif se simplifie ainsi:

$$
\begin{aligned}
\text{objectif} = \ & P_1T_1 && (45)\\
&+ P_3(1-P_1)(T_1+T_3) && (46)\\
&+ (1-P_1)(1-P_3)(T_1+T_3) && (47)
\end{aligned}
$$